Μαθηματικά αντικείμενα και σχέσεις στην υπηρεσία του Φιλοσοφικού και Μεταφυσικού στοχασμού.

Γιάννης Πλατάρος, Μαθηματικός, Καπετάν Κρόμπα 37,

Τ.Κ. 242 00 ΜΕΣΣΗΝΗ , ηλ.ταχ. plataros@gmail.com

Περίληψη: Τα Μαθηματικά αντικείμενα και οι σχέσεις που τα διέπουν, βοηθούν σε κάποιες απαντήσεις φιλοσοφικού στοχασμού. Μαθηματικά προσομοιώματα, διευρύνουν τα όρια του πιθανού, του απίθανου, εφικτού ανέφικτου, δυνατού, αδύνατου. Τα Μαθηματικά, έχουν όρια στις απαντήσεις τους. Όμως, εξακολουθούν να αποτελούν ένα υπερ-εργαλείο για διαπραγμάτευση σε ερωτήματα από όλες τις Επιστήμες και ιδιαιτέρως από την Φιλοσοφία. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα φιλοσοφικού ενδιαφέροντος ερωτήματα που εμπεριέχουν το άπειρο, καθώς τα όποια πορίσματα που αναφέρονται σε αυτό και δεν είναι εύκολα παραδεκτά από την μάλλον πεπερασμένη ανθρώπινη φύση. Εκεί, έρχεται η Μαθηματική προσέγγιση στα ερωτήματα, για να αποτολμήσει κάποιες απαντήσεις, λιγότερο ή περισσότερο αποδεκτές.

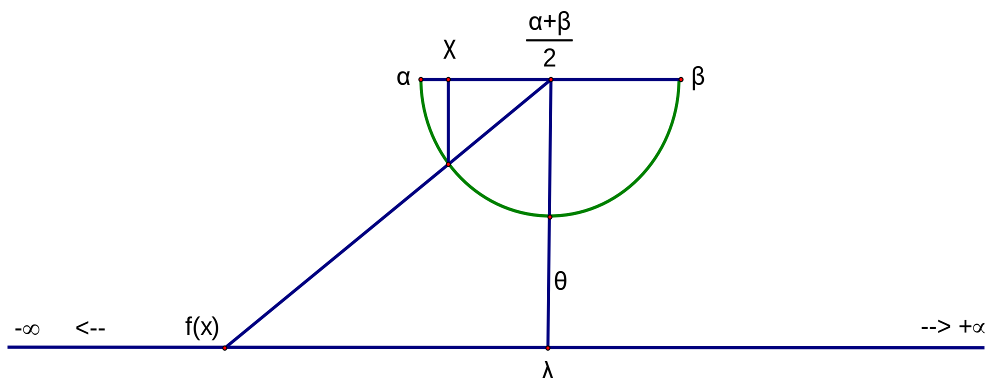
Εισαγωγή: Το που φθάνουν τα όρια των Μαθηματικών, εάν μπορούν να περιγράψουν την φύση, ποία η φύση των μαθηματικών αντικειμένων, είναι αντικείμενο ενασχόλησης της Φιλοσοφίας των Μαθηματικών, της Επιστημολογίας τους όπως και των Σχολών ρευμάτων και τάσεων των Μαθηματικών, όπως οι Πλατωνιστές, οι Αριστοτελικοί, οι Λογικιστές, οι Φορμαλιστές και οι Ιντουσιονιστές. Η κατάρρευση της θεμελίωσης της θεωρίας συνόλων από τον Φρέγκε (Frege), η επαναθεμέλιωσή τους σε άλλα (κατά Ζερμέλο-Φράνκελ [Zermelo-Fraenkel]) αξιώματα, η αποτυχημένη προσπάθεια του Χίλμπερτ (Hilbert) μέσω του φορμαλισμού να εξηγήσει όλα τα μαθηματικά, η διαψευσιμότητα και στα Μαθηματικά του Λάκατος (Lakatos), το σύνολο όλων των συνόλων, το παράδοξο του Ράσελ (Russel), τα θεωρήματα μη πληρότητας του Γκέντελ (Godel) , καταρρίπτουν το όραμα της εξήγησης των πάντων μέσω των Μαθηματικών. Ωστόσο, από την άλλη όχθη, υπάρχει η διαπίστωση του Φυσικού Νομπελίστα Ευγένιου Βίγκνερ (Eugene Wigner) για «την αδικαιολόγητη αποτελεσματικότητα των

Μαθηματικών στις Φυσικές Επιστήμες [1], [2] Σε κάθε περίπτωση κάποια μοντέλα ισχύουν αναλογικώς με τις όποιες παραδοχές που μπορεί να κάνει κάποιος και κάποια άλλα ισχύουν αμέσως. Παρουσιάζουμε παρακάτω συγκεκριμένες μαθηματικές επεξεργασίες για συγκεκριμένα ερωτήματα που εδρεύουν στον Φιλοσοφικό και Μεταφυσικό λογισμό του ανθρώπου. Η επιλογή τους έγινε με κριτήριο την ιστορικότητα, το ευρύτερο πέραν των Μαθηματικών ενδιαφέρον, το απρόσμενο των απαντήσεων, όπου υπάρχουν και κυρίως ως συμβολή στην ευρύτερη διδακτική οπτική τους ως απαραίτητο απτό υπερ-εργαλείο για τον φιλοσοφικό στοχασμό.

Ερώτημα 1: Αξίζει να πιστεύει κάποιος στον Θεό ή όχι; Στην *Θεωρία λήψης Αποφάσεων,* το γινόμενο $p_A Q_A$,όπου p_A είναι η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο Α και Q_A το όφελος όταν συμβεί το ενδεχόμενο Α, ονομάζεται **«Αναμενόμενο Όφελος»** (Μαθηματική Ελπίδα) [3] αναλόγως ορίζεται και το **«Αναμενόμενο Κόστος».** Αν δεχθούμε ότι η πιθανότητα ύπαρξης Θεού είναι $p_\theta > 0$ (έστω και ελαχιστότατη) τότε το όφελος Q_θ από την υπόσχεση του Θεού προς τον άνθρωπο, είναι άπειρο. (Ατελεύτητος ζωή σε απόλυτη, διαρκή ευδαιμονία) και το αναμενόμενο όφελος από το γινόμενο $p_\theta Q_\theta$ είναι κι αυτό άπειρο, αφού πεπερασμένο επί άπειρο κάνει άπειρο. Σε αντιδιαστολή, το όποιο όφελος $Q_{-\theta}$ από την μη ύπαρξη Θεού, οσοδήποτε μεγάλο κι αν είναι , είναι πεπερασμένο σε μια πεπερασμένη ζωή και επομένως και το αναμενόμενο όποιο όφελος $(1-p_\theta)Q_{-\theta}$ από την μη ύπαρξη Θεού, είναι πεπερασμένο και σε σχέση με το άπειρο, είναι μηδέν. Επομένως τα Μαθηματικά υποδεικνύουν αποδοχή της ύπαρξης Θεού, μέσω απειρίας οφέλους. Αυτό πραγματικά δεν ισχύει για κάποιον που πιστεύει ότι $p_\theta = 0$. Στην παγκόσμια βιβλιογραφία αυτό το αποτέλεσμα είναι πιο γνωστό ως «Το στοίχημα του Πασκάλ» [13] και είναι αντικείμενο διαμάχης μεταξύ ένθεων και αθέων. Ενδεικτικό είναι, ότι η Google, στην ακριβή αναζήτηση φράσης "στοίχημα του Πασκάλ" δίνει 1.870 αποτελέσματα, μόνο στα Ελληνικά. (Σεπτέμβριος 2015)

Ερώτημα 2: Το άπειρο χωρά ολόκληρο στο πεπερασμένο; Η πρώτη γρήγορη διαισθητική απάντηση είναι «προφανώς όχι» όμως στα μαθηματικά έχουμε απεικονίσεις 1-1 και επί μεταξύ των συνόλων $(\alpha,\beta)\, \kappa\alpha\iota\, (-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$. Μια από τις άπειρες είναι η πασίγνωστη συνάρτηση $(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}) \to (-\infty,+\infty): f(x)=\varepsilon\varphi\chi$ και βέβαια άπειρες άλλες.

Μια ενδιαφέρουσα απεικόνιση 1-1 και επί ενός ανοικτού διαστήματος (α,β) σε μια ευθεία $(-\infty,+\infty)$ φαίνεται με μια γεωμετρική της αναπαράσταση στο σχήμα 1:

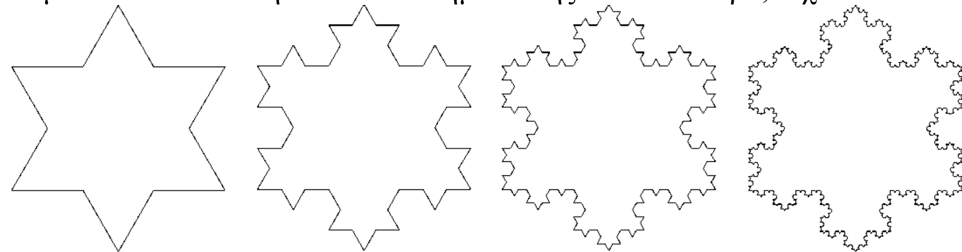


Σχήμα 1: Το χ κινείται ανάμεσα στο α και β. Είναι το ευθ. τμήμα αβ //(ε) Η προβολή του στο ημικύκλιο, ορίζει σημείο, το οποίο μια ακτίνα το προβάλει στην ευθεία (ε), με εκόνα του το f(x) . Με αυτή την απεικόνιση, καθώς το χ πλησιάζει το α, το f(x) απεικονίζεται οσοδήποτε μακριά. Όταν το χ ταυτιστεί με το α, έχω παραλληλία, όχι τομή, άρα όχι εικόνα, άρα έχω απεικόνιση ανοικτού διαστήματος. Ο αναγνώστης μπορεί να βρει και τον τύπο αυτής της απεικόνισης με όμοια τρίγωνα και λίγη αναλυτική Γεωμετρία και στην περίπτωση όπου η (ε) εφάπτεται στο ημικύκλιο να βρει την ειδική περίπτωση με την εφαπτομένη.

Στην περίπτωση της απεικόνισης f^{-1}: $(-\infty,+\infty)\to(\alpha,\beta)$ με $f^{-1}(\chi)=\tau o\xi\varepsilon\varphi\chi$, υλοποιείται σε επίπεδο ανάλογης Μαθηματικής προσομοίωσης το μεταφυσικό *«Χαῖρε Θεοῦ ἀχωρήτου χώρα» (Γ΄στάσις, 15^{ος} οίκος Χαιρετισμών της Παναγίας)* Στην αντίστροφη απεικόνιση f: $(\alpha,\beta)\to(-\infty,+\infty)$ υλοποιείται το ανάλογο Μαθηματικό προσομοίωμα της Παλαιάς Διαθήκης *«ἐγώ εἶπα : ὑμεῖς θεοί ἐστέ καί υἱοί Ὑψίστου πάντες» (Ψαλμοί Δαυίδ Ψαλμός 81,1,5.)* το οποίο απόσπασμα χρησιμοποιεί ο ίδιος ο Ιησούς προς τους Φαρισαίους που τον κατηγορούν ότι ισχυρίζεται ότι είναι Θεός: *«ἀπεκρίθη αὐτοῖς ὁ Ἰησοῦς· οὐκ ἔστι γεγραμμένον ἐν τῷ νόμῳ ὑμῶν, ἐγὼ εἶπα, θεοί ἐστε; εἰ ἐκείνους εἶπε θεούς, πρὸς οὓς ὁ λόγος τοῦ Θεοῦ ἐγένετο, καὶ οὐ δύναται λυθῆναι ἡ γραφή» (Ιω. 10,34-35)* Συμπερασματικά, το άπειρο χωρά ολόκληρο στο πεπερασμένο, ενώ και το πεπερασμένο ουσιαστικά είναι εν δυνάμει άπειρο. Αυτό ισχύει στα Μαθηματικά. Δεύτερο συμπέρασμα, ότι «*Πιθανόν, αναλογικώς, να ισχύει και αλλού*.»

Ερώτημα 3. Υπάρχουν άπειρα αντικείμενα που είναι πεπερασμένα; Το πιο προσιτό, ως έννοια, «άπειρο –πεπερασμένο» είναι το ανοικτό σύνολο (α,β), το οποίο δεν έχει αρχή ούτε τέλος , όμως έχει μήκος πεπερασμένο,

σύμφωνα με την κοινή μετρική 1. Δεν είναι δηλ. το μοντέλο της ευθείας που είναι ένα άπειρο μαθηματικό αντικείμενο, αλλά και το ανοικτό ευθύγραμμα τμήμα. Ο όρος «άπειρον» εννοεί το «μη έχον πέρας» και καλώς περιγράφει και τα ανοικτά σύνολα γενικώς. Φυσικά έχουμε και άλλα αντικείμενα με ενδιαφέρουσες μαθηματικές ιδιότητες, που είναι αρκετά πέραν της Φυσικής εμπειρίας παρ΄ότι όλα τα μαθηματικά αντικείμενα είναι ιδεατά προϊόντα γενίκευσης και αφαίρεσης. Έχουμε λοιπόν την νιφάδα του Κοχ (Koch) που έχει πεπερασμένο εμβαδόν, άπειρη περίμετρο, το μήκος της καμπύλης ανάμεσα σε οποιαδήποτε δύο σημεία της είναι άπειρο, έχει διάσταση



Σχήμα 2 Η νιφάδα του Koch σχηματίζεται από ένα αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο, όπου σε κάθε πλευρά του αφαιρείται το μεσαίο 1/3 και προστίθενται άλλες δύο ισομήκεις πλευρές ισοπλεύρου και αυτό επ΄άπειρον.

ανάμεσα στο 1 και στο 2, είναι δηλαδή μορφοκλασματικό αντικείμενο.



Σχήμα 3: Διαδοχικά βήματα κατασκευής τριγώνου Sierpinsky: Από το αρχικό μαύρο τρίγωνο «πετάμε» το κεντρικό 1/4, μένουν τρία άλλα μαύρα και συνεχίζουμε το ίδιο σε κάθε ένα που απομένει επ΄άπειρον



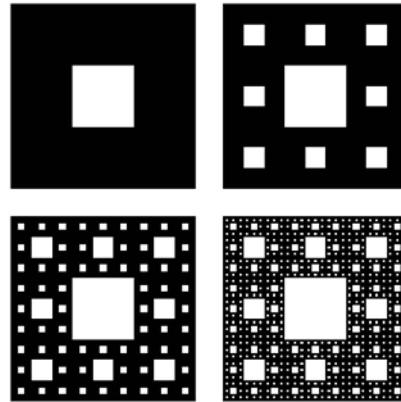
Σχήμα 4 Η κατασκευή του Συνόλου του Κάντορ, ξεκινά από ένα ευθύγραμμο τμήμα -διάστημα. Το χωρίζουμε σε 3 ίσα τμήματα και αφαιρούμε το μεσαίο. στα δύο εναπομένοντα, εφαρμόζουμε τον ίδιο κανόνα κ.ο.κ. επ΄άπειρον.

Το τρίγωνο του Ζαϊρπίνσκι (Sierpinski) όπου έχει εμβαδόν μηδέν, αλλά τα επί μέρους τρίγωνά του άπειρη περίμετρο. Το χαλί του Ζαϊρπίνσκι κι αυτό με μηδενικό εμβαδόν και άπειρη περίμετρο και διάσταση ανάμεσα στο 1 και το 2. Επίσης και το σύνολο του Κάντορ (Cantor), με μηδενικό μήκος, διάσταση ανάμεσα σε 0 και 1 και υπεραριθμήσιμο πλήθος στοιχείων, δηλ. περισσότερα στοιχεία από το πλήθος των

στοιχείων του $\mathbb{Q}$ και ίσα με το πλήθος των στοιχείων του $\mathbb{R}^{\kappa}$, όλα με ιδιότητες που μάλλον «μεταφυσικές» θα χαρακτήριζε κάποιος μη μαθηματικός. Συνύπαρξη απείρου με πεπερασμένο και διαστάσεις ανάμεσα στις ακέραιες.

Βεβαίως, έχουμε και πιο καθημερινά μαθηματικά αντικείμενα όπως η γεωμετρική σειρά

$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\kappa}} = 1$, η οποία παριστάνει άπειρο στο πλήθος άθροισμα πεπερασμένων θετικών αριθμών με πεπερασμένο αποτέλεσμα , το 1. Με αντίστροφη οπτική, το διάστημα [0, 1], μπορεί να τμηθεί σε άπειρα το πλήθος ευθύγραμμα τμήματα. Είναι ουσιαστικά η «κοινή απάντηση» στα πιο γνωστά παράδοξα του Ζήνωνα [5] όπου το άθροισμα άπειρων χρονικών διαστημάτων δίνει πεπερασμένο αποτέλεσμα και όχι άπειρο όπως υποβάλλει η κοινή διαίσθηση του ανθρώπου. Και βεβαίως σε διαισθητική αντίθεση με το αποτέλεσμα $\sum_{\kappa=10^{1.000.000.000}}^{\infty} \frac{1}{\kappa} = \infty$, όπου η έναρξη του κ, γίνεται από έναν αριθμό που δεν μπορεί κάποιος να διανοηθεί, δεδομένου ότι τα στοιχειώδη σωματίδια που χωράνε στο σύμπαν είναι της τάξης μόλις του 10^{80}.[6] Συμπερασματικά, όλα τα παραπάνω μαθηματικά αντικείμενα επεκτείνουν την φαντασία για όντα σε ενδιάμεσες των ακεραίων διαστάσεις κτλ. πέραν των διαστάσεων άνω του 3. Ιστορικά, Επιστημολογικά και Επιστημονικά, ουδείς μπορεί να αποκλείσει με βεβαιότητα και εκ των προτέρων την πιθανότητα να υπάρχουν κι όλας.



Σχήμα 5: Και το χαλί του Ζαϊρπίνσκι ακολουθεί την ίδια κατασκευαστική λογική με το ομώνυμο τρίγωνό του. Από ένα μαύρο τετράγωνο που χωρίζεται σε 9 ίσα τετράγωνα, αφαιρούμε το μεσαίο 1/9. Στα εναπομείναντα

Ερώτημα 4: Εφ΄ όσον ο Θεός είναι παντοδύναμος, μπορεί να φτιάξει μια πέτρα που να μην μπορεί να την σηκώσει; Αυτό το ερώτημα δεν είναι φιλοσοφικού τύπου, αλλά μόνο λογικού. Η μαθηματική δομή του ερωτήματος είναι η εξής: Έχουμε την λογική πρόταση p :«Ο Θεός είναι παντοδύναμος», και την πρόταση q : «Ο Θεός μπορεί να κατασκευάσει πέτρα που να μην μπορεί να την σηκώσει» (από την οποία προκύπτει αμέσως $q \Rightarrow \overline{p}$) Τότε η πρόταση $(p \wedge q) \wedge (q \Rightarrow \overline{p})$ συνιστά **αντίφαση**, όπως μπορεί να επαληθεύσει με έναν πίνακα αληθείας ο αναγνώστης ή εκτελώντας τις πράξεις με τους λογικούς τύπους: $(p \wedge q) \wedge (q \Rightarrow \overline{p}) \equiv (p \wedge q) \wedge \overline{(q \wedge p)} \equiv w \wedge \overline{w}$ $\quad \alpha\nu\tau\acute{\iota}\varphi\alpha\sigma\eta$. Επομένως το ερώτημα αντιστρατεύεται την Λογική Αρχή της «μη αντίφασης» Άρα, δεν γίνεται

δεκτό καν ως ερώτημα. Το αξιοπερίεργο με αυτό το λίαν διαδεδομένο ερώτημα από πολλές δεκαετίες, είναι η σοβαρή ακόμα αντιμετώπισή του ως διερευνητέου ερωτήματος μεταξύ «ενθέων και αθέων» όπου εμφανίζεται ως ανοικτό ερώτημα ή απαντημένο λανθασμένα ή ως ερώτημα ψυχαγωγικού τύπου, όμως χωρίς εξήγηση. Ο αναγνώστης αν βάλλει στην Google τέσσερις λέξεις κλειδιά «Θεός, παντοδύναμος, πέτρα, σηκώσει» βρίσκει πάνω από 6.700 διαπραγματεύσεις του ερωτήματος (αναζήτηση στις 27/08/2015) κατά κανόνα λιγότερο ή περισσότερο μακριά από τον πυρήνα του ερωτήματος που αποδείξαμε ως αντιφατικό.

Ερώτημα 5: Είναι δυνατόν ένα εφικτό και απολύτως δυνατό ενδεχόμενο να έχει πιθανότητα πραγματοποίησης 0; Μια γρήγορη απάντηση είναι ότι «Ναι, είναι εφικτό ένα δυνατό ενδεχόμενο Α να έχει πιθανότητα P(A)=0 , εάν το ενδεχόμενο Α δεν συμπεριλαμβάνεται στο σύνολο των ενδεχομένων ενός συγκεκριμένου πειράματος τύχης» Για παράδειγμα δίνουμε το ενδεχόμενο Α: «Το ζάρι δείχνει 7» που είναι αδύνατο ενδεχόμενο σε ένα κανονικό ζάρι, αλλά όχι και αδύνατο πραγματικά, εάν φτιάξουμε ζάρι με μια του ένδειξη σε πλευρά το 7. Το ερώτημα γίνεται λίαν ενδιαφέρον και εκφεύγει του τετριμμένου, εάν το Α, περιλαμβάνεται στον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης. Και η απάντηση είναι «Ναι, είναι δυνατόν και σε αυτή την περίπτωση» Δίνουμε συγκεκριμένα παραδείγματα:

Α) Φανταζόμαστε έναν άπειρο σάκο, εντός του οποίου θέτουμε άπειρα αριθμήσιμα διακριτά αντίγραφα του συνόλου όλων των ρητών και των αλγεβρικών αρρήτων. $\mathbb{Q} \cup \mathrm{A}$. Λέγοντας «διακριτά αντίγραφα» ας φανταστούμε τα ίδια μεν στοιχεία, αλλά σε άλλη απόχρωση χρώματος, από άπειρες διακριτές αποχρώσεις, έτσι ώστε να διαφοροποιούνται τα στοιχεία (=να μην θεωρούνται ίδια) και ως προς την απόχρωση. Δηλ. Το σύνολο $\mathrm{X} = \bigcup_{\iota=1}^{\infty}(\mathbb{Q}_{\iota} \cup \mathrm{A}_{\iota})$ Επίσης εισάγουμε εντός του ιδίου σάκου τους αρρήτους υπερβατικούς που υπάρχουν στο σύνολο B=(0, $10^{-1.000.000.000}$) που είναι ένα απειροελάχιστου μήκους διάστημα. Η πιθανότητα λοιπόν να εξαχθεί απ΄αυτή την κάλπη ρητός είτε άρρητος αλγεβρικός είναι σύμφωνα με την Θεωρία Μέτρου, $P(X) = \dfrac{\mu(\mathrm{X})}{\mu(\upsilon\pi\varepsilon\rho\beta\alpha\tau\iota\kappa o\acute{\iota}\ \sigma\tau o\ \mathrm{B})} = \dfrac{o}{10^{-1.000.000.000}} = 0$ Το αποτέλεσμα είναι απόρροια των παρακάτω προτάσεων της Θεωρίας μέτρου: (i) «Το μέτρο κάθε απείρου, αλλά αριθμήσιμου συνόλου, είναι μηδέν» (ii)«Άπειρη αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων, δίνει αριθμήσιμο σύνολο» και επίσης (iii) «Το μέτρο (εδώ μήκος) ενός διαστήματος δεν αλλάζει αν αφαιρέσουμε οποιοδήποτε αριθμήσιμο σύνολο απ΄αυτό»(iv) Το σύνολο των ρητών σε ένωση με το σύνολο των αλγεβρικών $\mathbb{Q} \cup \mathrm{A}$ είναι αριθμήσιμο. Και ενώ λοιπόν είναι εφικτή η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη οποιουδήποτε ρητού εντός λ.χ. του διαστήματος (0,1) ή και αλγεβρικού ρητού (λ.χ. του $\sqrt{2}$) η πιθανότητα τμήσης του σε ρητό με μια τυχαία ευθεία είναι 0, παρ΄ότι το ανθρώπινο πνεύμα δεν το δέχεται, έστω κι αν η απειρία του

υπεραριθμήσιμου του συνεχούς αποδεικνύεται ότι είναι «απείρως μεγαλύτερη» από την απειρία του αριθμησίμου. ($2^{\aleph_0} > \aleph_0$) Την ίδια δυσκολία παρουσιάζει το ανθρώπινο πνεύμα στο να παραδεχθεί ότι το (0,1) δεν έχει άκρα. Ακόμα και όταν γνωρίζει την απόδειξη *:«Έστω ότι το (0,1) είχε ένα δεξί μέγιστο άκρο το α. Τότε α<1 και επίσης* $\alpha < \frac{\alpha+1}{2} < 1$*, άτοπο, διότι το θεωρήσαμε το α ως το μέγιστο συνόλου (0,1) πριν το 1. Άρα το (0,1) δεν έχει δεξί άκρο και ομοίως και αριστερό».* Η κοινή όμως λογική με τα συγκεκριμένα μοντέλα με τα οποία αντιλαμβανόμαστε τον κόσμο, άρα και τα μαθηματικά αντικείμενα, αμφιβάλλει ακόμα και προ της αποδείξεως! Πιστεύει ότι 0,999999…. δεν είναι ίσο με 1 παρ΄ ότι μπορούν να προσκομιστούν διάφορες αποδείξεις και «νοιώθει» ότι το 0,9999… είναι το δεξί άκρο του (0,1) που δεν κάνει 1. [10],[11] Την ίδια αδυναμία διαισθητικής κατανόησης έχουμε όταν περιοριστούμε μόνο στους ρητούς θετικούς αριθμούς και προσπαθήσουμε να φανταστούμε την πιθανότητα όπως από την διαίρεση δύο τυχαίων φυσικών να μην προκύπτει ρητός περιοδικός. Η κοινή μας εμπειρία έχει γνωστά κλάσματα καθημερινής χρήσης όπως ½ , ¾, 5/8 που δίνουν τους δεκαδικούς τερματιζόμενους. 0.5, 0.75 και 0.625 αντιστοίχως, Όμως η κλάση των δεκαδικών τερματιζόμενων περιγράφεται από το κλάσμα $\frac{\mathrm{A}}{2^{\mu}\cdot 5^{\nu}}$, με τα μ,ν φυσικούς και το κλάσμα ανάγωγο. Όταν εκτελεστεί η διαίρεση που υποδηλώνει και θεωρώντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι μ>ν, έχουμε στην ουσία τα άδηλα, μη ορατά βήματα στον αλγόριθμο της διαίρεσης: $\frac{\mathrm{A}}{2^{\mu}\cdot 5^{\nu}} = \frac{\mathrm{A}\cdot 5^{\mu-\nu}}{2^{\mu}\cdot 5^{\nu}\cdot 5^{\mu-\nu}} = \frac{\mathrm{A}\cdot 5^{\mu-\nu}}{2^{\mu}\cdot 5^{\mu}} = \frac{\mathrm{A}\cdot 5^{\mu-\nu}}{10^{\mu}}$,όπου απ΄ την αριθμητική δεκαδική έκφραση του ακέραιου $\mathrm{A}\cdot 5^{\mu-\nu}$, χωρίζουμε από τ΄ αριστερά προς τα δεξιά, μ ψηφία του και βάζουμε την υποδιαστολή. Άρα η πιθανότητα περατούμενης διαιρέσεως, εξαρτάται μόνο από τον παρονομαστή του αναγώγου που περιλαμβάνει δύο μόνο πρώτους και για κάθε φυσικό εκθέτη, ενώ όλες οι δυνητικές περιπτώσεις είναι άπειρες, καθώς οι πρώτοι (όπως ευφυώς απέδειξε ο Ευκλείδης) είναι άπειροι στο πλήθος. Επομένως η πιθανότητα είναι 0 και μπορούμε να ισχυριστούμε, ότι *«όλοι οι ρητοί είναι δεκαδικοί περιοδικοί, εκτός απ΄αυτούς που έχουν περίοδο το 9»*, οι οποίοι –και μόνον αυτοί- μπορούν να παρασταθούν με περατούμενη μορφή. (Υπενθυμίζουμε την διπλή αναπαράσταση ενός ρητού με περίοδο το 9, λ.χ. $4,213\overline{9} = 3,213999999... = 3,214$) Το γενικότερο συμπέρασμα είναι, ότι όλα τα συστήματα αρίθμησης, αποτυγχάνουν παταγωδώς όχι μόνον να παραστήσουν τους αρρήτους, αλλά και τους ρητούς, αφού ένας ρητός μπορεί να έχει μια οσοδήποτε μεγάλη περίοδο η οποία μπορεί να άρχίζει από οσοδήποτε μεγάλο πλήθος ψηφίων μετά την υποδιαστολή. Τα καταφέρνουν ακριβώς μόνο στους «χ-αδικούς» (εδώ δεκαδικούς) ρητούς, οι οποίοι είναι οι μόνοι που έχουν περατούμενη παράσταση!

Η πιθανότητα επιλογής αρτίου από το σύνολο των Φυσικών $\mathbb{N}$, είναι (διαισθητικά) προφανώς $\frac{1}{2}$. Διότι αν ζ(ν) παριστάνει το πλήθος των ζυγών έως και το ν, τότε

$$p = \lim_{x\to\infty} \frac{\zeta(\nu)}{\nu} = \frac{\frac{\nu}{2}}{\nu} = \frac{1}{2} \quad (\nu, \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma) \ \acute{\eta} \quad p = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\nu-1}{2}}{\nu} = \frac{1}{2} \quad (\nu, \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma)$$

παρ΄ότι η απεικόνιση μεταξύ Φυσικών και Αρτίων που ορίζεται από την σχέση $\nu \leftrightarrow 2\nu$, είναι 1-1 και επί, δηλ. έχουν ίσους πληθικούς αριθμούς!

Μάλιστα, στην περίπτωση των συνόλων Τελείων τετραγώνων και Φυσικών, έχουμε την απεικόνιση $\nu \leftrightarrow \nu^2$ που κι αυτή είναι 1-1 και επί (πάντα κόντρα στην κοινή ανθρώπινη διαίσθηση) Από άλλη όμως οπτική, η ταυτότητα $(\nu+1)^2 - \nu^2 = 2\nu + 1$ μπορεί να αναγνωστεί ως *«υπάρχει οσοδήποτε μεγάλο διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών τετραγώνων»* δηλ., ότι «τα τέλεια τετράγωνα «αραιώνουν» απεριόριστα αυξανομένων των φυσικών. Βεβαίως, αν αναζητήσουμε την πιθανότητα επιλογής τελείου τετραγώνου από τους φυσικούς, θα αναζητήσουμε το $\lim_{\nu\to\infty} \frac{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \tau\varepsilon\lambda\varepsilon\acute{\iota}\omega\nu\ \tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu\omega\nu\ \acute{\varepsilon}\omega\varsigma\ \tau o\ \nu}{\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{[\sqrt{\nu}]}{\nu} = 0$ και επομένως η πιθανότητα επιλογής τελείου τετραγώνου από τους φυσικούς είναι 0. (Νέα «γνωστική σύγκρουση»)

Στους πρώτους έχουμε ανάλογα αποτελέσματα: Αν ως π(x) ορίσουμε την συνάρτηση ως «το πλήθος των πρώτων αριθμών μέχρι και τον πραγματικό αριθμό x », τότε αποδεικνύεται [7] ότι $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0$. Η ερμηνεία και εδώ του αποτελέσματος, είναι ότι η πιθανότητα επιλογής πρώτου από τους φυσικούς είναι 0, παρ΄ ότι η απεικόνιση $p_\nu \leftrightarrow \nu$, είναι 1-1 και επί του $\mathbb{N}$ (p_ν η ακολουθία των πρώτων αριθμών) Το αποτέλεσμα γίνεται πιο κατανοητό, αν σκεφθούμε ότι *«υπάρχουν οσοδήποτε μεγάλα διαστήματα χωρίς πρώτους αριθμούς»* (όπως και με τα τέλεια τετράγωνα προηγουμένως) Για παράδειγμα δεδομένου ενός φυσικού ν οσοδήποτε μεγάλου, η πεπερασμένη ακολουθία (ν+1)!+2, (ν+1)!+3,(ν+1)!+4,…,(ν+1)!+ν, (ν+1)!+(ν+1) είναι ακολουθία, ν διαδοχικών φυσικών όπου κανένας δεν είναι πρώτος, αφού όλοι είναι σύνθετοι μιας και εξάγεται ως κοινός παράγοντας από κάθε έναν, ο δεξιός προσθετέος.

Συμπερασματικά: Υπάρχουν εφικτά ενδεχόμενα σε έναν δειγματόχωρο με πιθανότητα πραγματοποίησης 0. Η αντίληψη των πεπερασμένων δειγματόχωρων, το ατελές προσωπικό εννοιολογικό κτίσιμο των εννοιών, μας εμποδίζει να το δούμε το αληθές. Το άπειρο δεν είναι έννοια διαισθητικά αντιλαμβανόμενη και κατανοούμενη. Μαθηματικά αντικείμενα μοιάζουν ίσα, ενώ είναι –αν νεολογίσουμε- «απείρως άνισα» και αντιστρόφως. Η διαίσθηση γενικώς είναι κάκιστος σύμβουλος. Η ενασχόλησή με υψιπετή και ανώτερα γενικά ερωτήματα δεν μπορεί να βασίζεται στην διαίσθηση. Δεν είναι πολλάκις έτσι, αν έτσι νομίζουμε.

Ερώτημα 6: Μπορούσε ο Κόσμος μας να ήταν καλύτερος; Η αυθόρμητη καταφατική απάντηση που δίνουν στο ερώτημα όλοι οι άνθρωποι, έρχεται σε απόλυτη αντίθεση με έναν απολύτως λογικό συλλογισμό του Λάϊμπνιτς (Leibitz) γνωστό και ως «τρίλημμα του Λάϊμπνιτς» [8] Σύμφωνα με αυτόν, ο κόσμος που έχει φτιάξει ο Θεός είναι ο καλύτερος δυνατός κόσμος όλων των δυνατών κόσμων που θα μπορούσαν ποτέ να υπάρξουν, διότι (χρήση της εις άτοπον απαγωγής) εάν μπορούσε να υπάρξει ένας καλύτερος κόσμος από τον σημερινό, τότε ο Θεός ως Παντοδύναμος θα μπορούσε να τον κατασκευάσει, ως Πάνσοφος θα γνώριζε πώς να τον κατασκευάσει και ως Πανάγαθος θα ήθελε να τον κατά σκευάσει. Άτοπο. Επομένως ο κόσμος μας είναι ο καλύτερος όλων όσων θα μπορούσαν να κατασκευαστούν. Βεβαίως η κατανόηση του αντιφατικού με την κοινή λογική αποτελέσματος, έχει ως λέξης κλειδί την ελευθερία επιλογών του ανθρώπου, η οποία δεν μπορεί να είναι μονότιμη και μονόδρομη, άρα όχι ελεύθερη.

Γενικότερα Συμπεράσματα. : Τα Μαθηματικά αντικείμενα μέσω αφαίρεσης και γενίκευσης της Φύσης, έχουν ιδιότητες που ένας μη μαθηματικός χαρακτηρίζει «μεταφυσικές» . Είναι άπειρα, είναι πεπερασμένα χωρίς όρια, περατά ως προς κάποιες ιδιότητές τους και άπειρα προς άλλες, έχουν διαστάσεις και πάνω από 3, κάποια έχουν διαστάσεις μη ακέραιες, κάποια άλλα είναι ίσα ενώ μοιάζουν άνισα, άλλα που μοιάζουν άνισα ενώ είναι ίσα, δυνατά εφικτά πραγματοποιούμενα κατασκευαστικά ενδεχόμενα δειγματικού χώρου με μηδέν όμως πιθανότητες πραγματοποίησής τους. Η μαθηματική λογική αποφαίνεται για προτάσεις που μοιάζουν σωστές ενώ δεν είναι και για προτάσεις που μοιάζουν λανθασμένες ενώ είναι σωστές. Τα ίδια τα Μαθηματικά ως λογικό σύστημα *«το λιγότερο αντιφατικό»* που γνωρίζουμε, σε συνδυασμό με την «παράλογη αποτελεσματικότητά τους» [2] σε όλους τους τομείς του επιστητού, δίνουν λαβή για γόνιμη φαντασία, εικασίες, υποθέσεις, θεωρίες, επαληθεύσεις, διαψεύσεις, αντιπαραδείγματα, αποδείξεις, αναλογική σκέψη, νοητικά πειράματα, μοντελοποίηση, όπου και οι εφαρμογές τους στην Φυσική να μοιάζουν έντονα ως μεταφυσικές [9] πάντα όμως μέσα στα Επιστημολογικά όρια της «Διαψευσιμότητας» όπου και τελικά η συμβολή των Μαθηματικών στον εν γένει ανθρώπινο Επιστημονικό και Φιλοσοφικό στοχασμό να καθίσταται πραγματικά, άκρως απαραίτητη.

Summary: Mathematics objects and relationships that govern, help some answers of philosophical thought. Some mathematical models, expand the boundaries between possible, improbable, possible and impossible. Mathematics, have limits on their answers. But still a super tool for discussion on all questions of science and particularly the philosophy. The questions concerning the infinity are of particular interest because, whatever the findings set out in it, is not easily accepted by the finite human nature. Here comes the mathematical truth to venture some answers more or less acceptable.

Βιβλιογραφία:

[1] Wigner, Eugene *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences.* Δικτυακός τόπος https://www.dartmouth.edu/~matc/MathDrama/reading/Wigner.html

[2] Νεγρεπόντης Στυλιανός –Φαρμάκη Βασιλική *Η «παράλογη» αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στις άλλες Επιστήμες*. Δικτυακός τόπος: http://thalesandfriends.org/wp-content/uploads/2012/03/efficiency.pdf

[3] Παναγιώτου Νικόλαος, *Ανάλυση Αποφάσεων* δικτυακός τόπος: http://panayiot.simor.ntua.gr/attachments/039_06MBAOR.pdf

[4] Pascal Blaise Σκέψεις (τμήμα 233), μεταφρασμένο, με σχόλια Δικτυακός τόπος: https://onthewaytoithaca.wordpress.com/2010/08/23/pascals-wager-the-whole-thing/

[5] https://el.wikipedia.org/wiki/Παράδοξα_του_Ζήνωνα

[6] http://westcult.gr/index.php/arthrografia/philosophizing/posoi-kokkoi-ammou-apaitoyntai-gia-na-katalavoun-ton-synoliko-ogko-tou-sympantos

[7] Λαρεντζάκη Ευαγγελία «Οι Πρώτοι Αριθμοί» (Διπλωματική Εργασία) ΕΜΠ 2012 Διατίθεται εδώ: http://www.math.ntua.gr/~sofia/dissertations/Larentzaki.pdf

[8] Σύντομο Βιογραφικό Σημείωμα για τον Gottfried Wilhelm Leibnitz http://www.biblical-studies.gr/kbma/Portals/0/PDF/Tehnes/Laibnitz.pdf

[9] Δανέζης Μάνος «Από την Κλασική στην Κβαντική Φυσική (Από την Μεταφυσική στην Φυσική)» άρθρο προσωπικού Ιστολογίου, διατίθεται εδώ http://manosdanezis.gr/index.php/blog/307-2015-02-07-18-53-16

[10] «Υπάρχει το 0,99999…; » Ερώτημα στο φόρουμ των φοιτητών του Μαθηματικού Τμήματος του Παν. Αθηνών με 115 μηνύματα. Διατίθεται εδώ: http://forum.math.uoa.gr/viewtopic.php?f=15&t=10116&start=0

[11] «Does 0.9999999... truly equal 1?» Ερώτημα σε παγκόσμιο μαθηματικό φόρουμ, με 76 μηνύματα. Διατίθεται εδώ: https://www.linkedin.com/grp/post/1872005-6044962556768956419

[12] «Περιοδικός αριθμός» Λήμμα στην Ελληνική Wikipedia. Διατίθεται: https://el.wikipedia.org/wiki/Περιοδικός_αριθμός

[13] «Το στοίχημα του Πασκάλ» https://onthewaytoithaca.wordpress.com/2010/08/23/pascals-wager-the-whole-thing